Автоматика и телемеханика, № 3, 2017

Безопасность, живучесть, надежность, техническая диагностика

© 2017 г. **И.В. ПАВЛОВ, д-р физ.-мат. наук (ipavlov@bmstu.ru)**
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается задача построения нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы (функции надежности) системы по результатам испытаний ее элементов. Предлагается решение этой задачи для довольно общего случая стареющих (с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов) элементов системы. Получены приближенные асимптотические (для случая высокой надежности) выражения для случаев, когда резервирование в системе может производиться как идентичными, так и разнотипными элементами.

Ключевые слова: надежность, система, функция интенсивности отказов, функция надежности.

1. Введение. Система с резервированием со стареющими элементами

Рассмотрим систему, состоящую из n элементов, работающих в режиме нагруженного (горячего) резервирования. В предположении, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга, вероятность безотказной работы (функция надежности) системы на интервале времени $(0, t)$ имеет вид

$$H(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P_i(t)], \tag{1}$$

где $P_i(t) = P\{\xi_i > t\}$ — функция надежности, ξ_i — время безотказной работы i-го элемента. Обозначим через $F_i(t) = 1 - P_i(t)$ функцию распределения случайной величины (с.в.) ξ_i, через $f_i(t)$ — соответствующую плотность распределения и через $r_i(t) = f_i(t)/P_i(t)$ — функцию интенсивности отказов (предполагая далее функции $f_i(t)$ и $r_i(t)$ кусочно-непрерывными по $t \geqslant 0$), через $R_i(t) = -\ln P_i(t) = \int_o^t r_i(z)dz$ — ведущую функцию [1] или функцию риска (в терминологии [2, 3]) для i-го элемента, через $R = [R_1(t), \ldots, R_n(t)]$ — вектор ведущих функций по всем элементам, и через V — множество всех R таких, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ функция $R_i(t)$ выпукла вниз по $t \geqslant 0$ (при всех t таких, что $P_i(t) > 0$). Далее будем предполагать, что $R \in V$, т.е. все элементы системы, имеют распределения с возрастающей функцией интенсивности отказов (ВФИ) времени безотказной работы. Такие элементы будем называть стареющими или ВФИ-элементами.

Требуется построить нижнюю доверительную границу для функции надежности системы (1) по результатам испытаний системы и ее элементов на конечном интервале времени $(0, T)$. Предполагается, что испытания системы проводятся с восстановлением (заменой) отказавших элементов в момент отказа идентичными элементами, т.е. каждый i-й элемент, $i = 1, \dots, n$, испытывается в соответствии с планом [1 В Т] в обозначениях из [1]. При этом наблюдается n независимых потоков восстановления элементов системы на интервале $(0, T)$. (Предполагается, что результаты испытаний по различным элементам системы независимы между собой.) Обозначим через $d_i = d_i(T)$ число отказов элементов i-го типа, наблюдаемое в i-м потоке восстановления на интервале $(0, T)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$ — вектор результатов испытаний по всем элементам, $P_R\{d\}$ — вероятностное распределение на множестве результатов испытаний $X = \{d : d_i = 0, 1, 2, \dots;\ i = 1, \dots, n\}$ при данном $R \in V$. Пусть

$$Q(R, t) = \prod_{i=1}^{n} \{1 - \exp[-R_i(t)]\} \tag{2}$$

— вероятность отказа системы при данном $R \in V$. Требуется, исходя из вектора результатов испытаний $d = (d_1, \dots, d_n)$ по элементам системы, построить верхнюю γ-доверительную границу для вероятности отказа системы (2) в классе стареющих распределений, т.е. функцию результатов испытаний $\overline{Q}(d, t)$ такую, что $P_R\{\overline{Q}(d, t) \geqslant Q(R, t)\} \geqslant \gamma$ при всех $R \in V$, $t \geqslant 0$.

2. Элементы с экспоненциальным распределением времени безотказной работы

Рассмотрим сначала решение данной задачи в предположении, что элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы, т.е. $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$, где $\lambda_i > 0$ — параметр, $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $V_1 \subset V$ подкласс всех $R = [R_1(t), \dots, R_m(t)]$ таких, что $R_i(t) = \lambda_i t$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$. Задача в этом случае сводится к построению верхней доверительной границы $\overline{Q}(d, t)$ такой, что

$$P_R\{\overline{Q}(d, t) \geqslant Q(R, t)\} \geqslant \gamma \quad \text{при всех} \quad R \in V_1, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda : \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n\}$ — множество всех возможных значений вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ параметров надежности элементов и $P_\lambda\{d\} = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i T)(\lambda_i T)^{d_i}/d_i!$ — вероятностное распределение на множестве результатов испытаний $X = \{d\}$ при данном $\lambda \in \Lambda$. Вероятность отказа системы в этом случае $Q(\lambda, t) = \prod_{i=1}^{n}[1 - \exp(-\lambda_i t)]$, $\lambda \in \Lambda$. Неравенство (3) соответственно принимает вид $P_\lambda\{\overline{Q}(d, t) \geqslant Q(\lambda, t)\} \geqslant \gamma$ при всех $\lambda \in \Lambda$, $t \geqslant 0$. Суммарное число отказов элементов $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$, наблюдаемое на испытаниях, в данном случае имеет пуассоновское распределение с параметром $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T$. Тем самым, справедливо неравенство

$$P_\lambda \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T \leqslant \triangle_{\gamma(D)} \right\} \geqslant \gamma \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \Lambda, \tag{4}$$

где $\triangle_\gamma(D)$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра пуассоновского распределения по результату наблюдений D (см. например, [1, § 3.4]), определяемая из уравнения $L_D(\triangle) = 1 - \gamma$, где $L_m(\triangle) = \exp(-\triangle)\sum_{j=0}^{m} \triangle^j/j!$. Каждому возможному значению вектора результатов испытаний $d \in X$ поставим в соответствие множество в пространстве параметров $H_d = \{\lambda \in \Lambda : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T \leqslant \triangle_\gamma(D)\}$.

В силу (4) набор множеств $H_d \subset \Lambda$, $d \in X$, образуют систему γ-доверительных множеств для $\lambda : P_\lambda\{\lambda \in H_d\} \geqslant \gamma$, $\lambda \in \Lambda$. В соответствии с общей процедурой метода доверительных множеств (см. [1, 4, 5, гл. 7, 6–9] и др.) верхняя доверительная граница с коэффициентом доверия не меньше γ для вероятности отказа системы $Q(\lambda, t)$ далее находится как

$$\overline{Q}(d,t) = \max_{\lambda \in H_d} Q(\lambda, t), \tag{5}$$

где максимум берется по множеству $H_d \subset \Lambda$. Функция $Q(\lambda, t)$ монотонно возрастает по каждому параметру λ_i. Откуда далее получаем $\overline{Q}(d,t) = \exp[\overline{f}(d,t)]$, где

$$\overline{f}(d,t) = \max \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_i t), \tag{6}$$

где функция $f_i(\lambda_i t) = \ln[1 - \exp(-\lambda_i t)]$ монотонно возрастает и выпукла вверх по $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, а максимум берется при ограничении $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T = \triangle_\gamma(D)$. Откуда после простых преобразований следует, что максимум (6) достигается в точке $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \triangle_\gamma(D)/nT$. Соответствующее значение верхней доверительной границы (5) для вероятности отказа системы равно

$$\overline{Q}(d,t) = \{1 - \exp[-\triangle_\gamma(D)t/nT]\}^n. \tag{7}$$

3. Идентичные элементы

Рассмотрим случай, когда элементы системы идентичны, т.е. имеют одинаковые параметры надежности $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$. В этом случае испытания системы на интервале времени $(0, T)$ с восстановлением отказавших элементов сводятся к испытаниям одного элемента по стандартному плану типа [n B T] (см. [1, §. 3.1]). Вероятность отказа системы в этом случае $Q_{\text{ид}}(\lambda, t) = [1 - \exp(-\lambda t)]^n$. Задача при этом сводится к доверительному оцениванию одномерного параметра λ. Суммарное количество отказов элементов $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$ при этом имеет пуассоновское распределение с параметром $n\lambda T$, откуда следует стандартная верхняя γ-доверительная граница $\overline{\lambda} = \triangle_\gamma(D)/nT$ для параметра λ и соответствующая верхняя доверительная граница для вероятности отказа системы

$$\overline{Q}_{\text{ид}}(d,t) = [1 - \exp(-\overline{\lambda} t)]^n = \{1 - \exp[-\triangle_\gamma(D)t/nT]\}^n.$$

Это выражение совпадает с полученной формулой (7) для более общего случая, когда предполагается, что элементы системы могут быть различными (не обязательно являются идентичными). Это означает, что если элементы системы испытывались в течение одинакового времени T, то дополнительная априорная информация об идентичности элементов системы (если таковая имеется) не дает выигрыша при доверительном оценивании вероятности отказа системы сверху (и соответствено надежности системы снизу). В случае различных объемов испытаний элементов T_i, $i = 1, \ldots, n$, это, вообще говоря, уже не так (см. раздел 4).

4. Различные объемы испытаний элементов

Рассмотрим более общий случай, когда различные элементы могут испытываться в течение различного времени, т.е. указанный выше поток восстановления для элементов i-го типа наблюдается на интервале времени $(0, T_i)$, где величины T_i, $i = 1, \ldots, n$, вообще говоря, различны. В этом случае система γ-доверительных множеств для $\lambda \in \Lambda$ имеет вид $H_d = \{\lambda \in \Lambda : \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i \leqslant \leqslant \triangle_\gamma(D)\}$, $d \in X$. Откуда находим, что верхняя γ-доверительная граница для вероятности отказа системы определяется как $\overline{Q}(d,t) = \exp[\overline{f}(d,t)]$, где

$$\overline{f}(d,t) = \max \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_i t), \tag{8}$$

где максимум берется при ограничении $\sum_{i=1}^n \lambda_i T_i = \triangle_\gamma(D)$. Система уравнений Лагранжа для условного экстремума (8) в данном случае имеет вид $f_i'(\lambda_i t) = t/[\exp(\lambda_i t) - 1] = \beta T_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\beta > 0$ — множитель Лагранжа. Откуда, учитывая выпуклость вверх функций $f_i(\lambda_i t)$, получаем

$$\overline{Q}(d,t) = \beta^n(t) t^n / \prod_{i=1}^{n} [T_i + \beta(t) t], \tag{9}$$

где $\beta = \beta(t)$ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i/t) \ln(1 + \beta t / T_i) = \triangle_\gamma(D). \tag{10}$$

В случае идентичных элементов с равными параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \ldots = \lambda_n = \lambda$ стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра λ имеет вид $\overline{\lambda} = \triangle_\gamma(D) / \sum_{i=1}^n T_i$. Верхняя γ-доверительная граница для вероятности отказов системы в этом случае равна

$$\overline{Q}_{\text{ид}}(d,t) = [1 - \exp(-\overline{\lambda} t)]^n = \left\{ 1 - \exp[-\triangle_\gamma(D) t / \sum_{i=1}^{n} T_i] \right\}^n . \tag{11}$$

Рассмотрим отношение $\overline{Q}(d,t)/\overline{Q}_{\text{ид}}(d,t)$, показывающее относительный выигрыш, который дает дополнительная информация об идентичности элементов системы (если таковая имеется) при доверительном оценивании вероятности отказа системы сверху. Следующая теорема дает асимптотическое для случая высокой надежности (при $t \to 0$) выражение для этой величины.

Т е о р е м а 1. *При $t \to 0$ и любом $d \in X$*

$$\overline{Q}(d,t)/\overline{Q}_{\text{ид}}(d,t) = (T_c/T_g)^n[1+o(1)], \tag{12}$$

где $T_c = \sum_{i=1}^n T_i/n$ — среднее арифметическое и $T_g = (\prod_{i=1}^n T_i)^{1/n}$ — среднее геометрическое значения по объемам испытаний элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (10) после простых преобразований следует $\beta(t) = n^{-1}\triangle_\gamma(D) + C_1 t + o(t)$, где константа $C_1 = \triangle_\gamma^2(D)\sum_{i=1}^n(1/2n^3T_i)$. Из (9), (10) далее получаем

$$\overline{Q}(d,t) = [\triangle_\gamma(D)/nT_g]^n t^n(1 - C_2 t + o(t)),$$

где $C_2 = \triangle_\gamma(D)\sum_{i=1}^n(1/2nT_i)$. Из (11) следует аналогичное асимптотическое выражение для $\overline{Q}_{\text{ид}}\,(d,t)$:

$$\overline{Q}_{\text{ид}}\,(d,t) = [\triangle_\gamma(D)/nT_c]^n t^n(1 - C_3 t + o(t)),$$

где константа $C_3 = \triangle_\gamma(D)/2T_c$, откуда следует (12).

Как видно из этих выражений, на начальном интервале времени верхняя доверительная граница для вероятности отказа системы может вычисляться по простой приближенной формуле

$$\overline{Q}(d,t) \cong [\triangle_\gamma(D)/n]^n(t/T_g)^n,$$

где T_g — среднее геометрическое время испытаний элементов.

5. Стареющие элементы

Рассмотрим решение для более общего случая в предположении, что $R \in$ $\in V$, т.е. система состоит из ВФИ-элементов. Обозначим через

$$\Phi_R(m) = P_R\left\{\sum_{i=1}^n d_i \leqslant m\right\}, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

функцию распределения с.в. $\sum_{i=1}^n d_i$ при данном $R \in V$. Пусть $0 < \gamma < 1$. Каждому $R \in V$ поставим в соответствие множество $G_R \subset X$ следующим образом: $G_R = \{d \in X : \sum_{i=1}^n d_i \geqslant M_\gamma(R)\}$, где

$$M_\gamma(R) = \max\left\{m = 0,1,2,\ldots : P_R\left(\sum_{i=1}^n d_i \geqslant m\right) \geqslant \gamma\right\}.$$

Тогда по определению этой величины выполняется неравенство $P_R\{d \in G_R\} \geqslant$ $\geqslant \gamma$, $R \in V$. Далее каждому $d \in X$ поставим в соответствие множество $H_d =$ $= \{R \in V : d \in G_R\} \subset V$. События $\{R \in H_d\}$ и $\{d \in G_R\}$ эквивалентны по построению, откуда следует $P_R\{R \in H_d\} = P_R\{d \in G_R\} \geqslant \gamma$, $R \in V$. Тем самым $H_d \subset V$, $d \in X$, образуют систему γ-доверительных множеств для $R \in V$. По определению величины $M_\gamma(R)$ неравенство $M_\gamma(R) \leqslant m$ эквивалентно неравенству $P_R\{\sum_{i=1}^n d_i > m\} < \gamma$, или, другими словами, неравенству $\Phi_R(m) >$

$> 1-\gamma$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ Тем самым доверительное множество $H_d \subset V$ при каждом $d \in X$ может быть задано в эквивалентном виде как $H_d = \{R \in V : \Phi_R(D) > 1-\gamma\}$, где $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Верхняя доверительная граница с коэффициентом доверия не меньше γ для вероятности отказа системы (2) далее может быть найдена как

$$\overline{Q}(d,t) = \sup_{R \in H_d} \prod_{i=1}^{n} \{1 - \exp[-R_i(t)]\}, \tag{13}$$

где sup берется по $R \in H_d$, т.е. по всем $R \in V$ таким, что выполняется неравенство

$$\Phi_R(D) > 1-\gamma. \tag{14}$$

Решение задачи (13), (14) далее может быть получено на основе следующего неравенства (15) для функции распределения числа отказов $d_i = d_i(T_i)$ элементов i-го типа, наблюдаемого на испытаниях в указанном выше i-м потоке восстановления на интервале времени $(0, T_i)$, в классе ВФИ-распределений V.

Т е о р е м а 2. *Пусть $R \in V$. Тогда функция распределения с.в. $d_i = d_i(T_i)$ удовлетворяет неравенству*

$$P_R\{d_i \leqslant m\} \leqslant L_m\left[(m+1)R_i\left(\frac{T_i}{m+1}\right)\right], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

где $L_m(z)$ — указанная выше функция пуассоновского распределения, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть неравенства (15) может быть представлена в виде

$$P_R\{d_i \leqslant m\} = P_R\left\{\sum_{j=1}^{m+1} \xi_{ij} \geqslant T_i\right\}, \tag{16}$$

где ξ_{ij}, $j = 1, \ldots, m+1$, — независимые одинаково распределенные с.в. с функцией распределения $F_i(t) = 1 - \exp[-R_i(t)]$. Рассмотрим величину

$$A_i = \min \sum_{j=1}^{m+1} R_i(x_j), \tag{17}$$

где минимум берется по $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ при ограничениях $\sum_{j=1}^{m+1} x_j \geqslant T_i$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m+1$. Функция $R_i(t)$ монотонно возрастает и выпукла вниз по $t \geqslant 0$. Откуда следует, что минимум (17) достигается в точке $x_1 = \ldots$ $\ldots = x_{m+1} = T_i/(m+1)$ и, следовательно, $A_i = (m+1)R[T_i/(m+1)]$. Из (16), (17) далее следует

$$P_R\{d_i \leqslant m\} = P_R\left\{\sum_{j=1}^{m+1} \xi_{ij} \geqslant T_i\right\} \leqslant P_R\left\{\sum_{j=1}^{m+1} R_i(\xi_{ij}) \geqslant A_i\right\},$$

откуда, учитывая, что независимые одинаково распределенные с.в. $R_i(\xi_{ij})$, $j = 1, \ldots, m+1$, имеют экспоненциальную функцию распределения $1 - e^{-t}$, следует неравенство (15) для каждого $i = 1, \ldots, n;\ m = 0, 1, 2, \ldots$

Используя неравенство (15), рассмотрим решение задачи построения верхней доверительной границы для вероятности отказа системы в (13), (14). При данном фиксированном значении D введем с.в. $d_i^* = 0, 1, 2, \ldots$ с функцией распределения

$$P_R(d_i^* \leqslant m) = L_m\left[(D+1)R_i\left(\frac{T_i}{D+1}\right)\right], \quad \text{если} \quad m \leqslant D,$$
$$P_R(d_i^* \leqslant m) = 1, \quad \text{если} \quad m > D.$$

Случайная величина d_i^*, таким образом, имеет усеченное (на уровне $D+1$) пуассоновское распределение с параметром $(D+1)R_i[T_i/(D+1)]$, $i = 1, \ldots, n$.

Из неравенства (15), учитывая также выпуклость вниз функции $R_i(t)$, следует, что при $m \leqslant D$ имеют место неравенства

$$P_R(d_i \leqslant m) \leqslant L_m\left[(m+1)R_i\left(\frac{T_i}{m+1}\right)\right] \leqslant L_m\left[(D+1)R_i\left(\frac{T_i}{D+1}\right)\right].$$

Откуда, учитывая определение усеченных с.в. d_i^*, получаем

$$P_R(d_i \leqslant m) \leqslant P_R(d_i^* \leqslant m) \quad \text{при всех} \quad i = 1, \ldots, n; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Из (18) далее следует $P_R(\sum_{i=1}^m d_i \leqslant D) \leqslant P_R(\sum_{i=1}^m d_i^* \leqslant D)$. Последнее неравенство, учитывая определение с.в. d_i^*, эквивалентно следующему

$$\Phi_R(D) \leqslant L_D\left\{\sum_{i=1}^m (D+1)R_i[T_i/(D+1)]\right\}. \tag{19}$$

Исходя из этого неравенства, рассмотрим вместо исходной задачи (13), (14) следующую более простую задачу: найти

$$\tilde{Q}(d,t) = \sup \prod_{i=1}^n \left\{1 - \exp[-R_i(t)]\right\}, \tag{20}$$

где sup вычисляется по всем $R \in V$ таким, что

$$L_D\left\{\sum_{i=1}^n (D+1)R_i[T_i/(D+1)]\right\} > 1 - \gamma. \tag{21}$$

В силу неравенства (19) решение задачи (20), (21) заведомо не меньше, чем решение исходной задачи (13), (14), т.е. $\overline{Q}(d,t) \leqslant \tilde{Q}(d,t)$ и, следовательно, $\tilde{Q}(d,t)$ также является верхней доверительной границей с коэффициентом доверия не меньше γ для вероятности отказа системы $Q(R,t)$ в классе стареющих распределений V. Далее будет показано, что по крайней мере на начальном интервале времени эти решения совпадают: $\overline{Q}(d,t) = \tilde{Q}(d,t)$.

Найдем решение задачи (20), (21). Ограничение (21) эквивалентно неравенству

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{n}(D+1)R_i[T_i/(D+1)] < \triangle_\gamma(D).$$

Введем параметры

$$(23) \qquad \alpha_i = R_i[T_i/(D+1)](D+1)/T_i, \quad i=1,\ldots,n.$$

Для каждого $i = 1,\ldots,n$ рассмотрим вспомогательную задачу: найти

$$(24) \qquad \overline{R}_i(t) = \max R_i(t),$$

где максимум берется по всем $R \in V$ таким, что выполняется равенство (23). Функция $R_i(t)$ выпукла вниз по $t \geqslant 0$, при этом $R_i(0) = 0$ и, кроме того, в силу (23) $R_i[T_i/(D+1)] = \alpha_i T_i/(D+1)$. Поскольку график выпуклой вниз функции лежит ниже хорды, соединяющей две точки на графике, отсюда следует, что

$$(25) \qquad \overline{R}_i(t) = \alpha_i t \quad \text{при} \quad t \leqslant T_i/(D+1),$$

$\overline{R}_l(t) = \infty$ при $t > T_i/(D+1)$. Откуда далее получаем, что решение задачи (20), (21) имеет следующий вид. Упорядочим индексы элементов $i = 1,\ldots,n$ по возрастанию объемов испытаний T_i, т.е. будем считать, что $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_n$. Тогда при $T_{k-1}/(D+1) < t \leqslant T_k/(D+1)$ величина $\tilde{Q}(d,t)$ равна:

$$(26) \qquad \tilde{Q}(d,t) = \max \prod_{i=k}^{n}[1-\exp(-\alpha_i t)],$$

где максимум берется по параметрам $\alpha_i \geqslant 0$, $i = k+1,\ldots,n$, при ограничении

$$(27) \qquad \sum_{i=k}^{n} T_i\alpha_i \leqslant \triangle_\gamma(D),$$

где $k = 1,\ldots,n$ ($T_0 = 0$). При $t > T_n/(D+1)$ $\tilde{Q}(d,t) = 1$. Откуда, используя (9) и (10) для экспоненциального случая, следует, что при $T_{k-1}/(D+1) < t \leqslant$ $\leqslant T_k/(D+1)$ верхняя доверительная граница для вероятности отказа системы

$$(28) \qquad \tilde{Q}(d,t) = \frac{\beta_k^{n-k+1}(t)t^{n-k+1}}{\prod\limits_{i=k}^{n}[T_i+\beta_k(t)t]},$$

где $\beta_k = \beta_k(t)$ определяется из уравнения

$$(29) \qquad \sum_{i=k}^{n}(T_i/t)\ln(1+\beta_k t/T_i) = \triangle_\gamma(D), \quad k=1,\ldots,n.$$

Из этих выражений видно, что на начальном интервале времени при $t \leqslant T_1/(D+1)$ величина $\tilde{Q}(d,t)$ совпадает с верхней доверительной границей (9), построенной для экспоненциального случая, т.е. в предположении, что $R \in V_1$. Кроме того, поскольку $V_1 \subset V$, то нетрудно видеть, что полученное в (26)–(29) решение упрощенной задачи (20)–(21) на начальном интервале времени совпадает с точным решением исходной задачи (13), (14), а именно $\tilde{Q}(d,t) = \overline{Q}(d,t)$ при $t \leqslant T_1/(D+1)$. Нижняя доверительная граница для функции надежности системы (1) далее может быть найдена как $\underline{H}(d,t) = 1 - \tilde{Q}(d,t)$.

Пример 1 (случай безотказных испытаний). Испытания системы из $n = 2$ элементов проводились в течение времени $T = 15$ часов, в результате чего наблюдались числа отказов по элементам $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. Требуется построить верхнюю γ-доверительную границу $\overline{Q}(d,t)$ (при $\gamma = 0{,}9$) для вероятности отказа системы к моменту времени $t = 2$ часа. В этом случае вычисляемая обычным способом (т.е. сначала для отдельных элементов, а затем для системы в целом подстановкой в функцию надежности системы) величина $\overline{Q} = \{1 - \exp[-\triangle_\gamma(0)t/T]\}^2 = 0{,}069$, а величина, вычисляемая на основе приведенных выражений (28), (29) (в данном случае $T_1 = T_2 = T$, $k = 1$), $\overline{Q} = \{1 - \exp[-\triangle_\gamma(0)t/2T]\}^2 = 0{,}020$.

Пример 2 (испытания с отказами). Пусть в условиях примера 1 наблюдаемые числа отказов $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. В этом случае вычисляемая первым способом верхняя доверительная граница $Q = \{1 - \exp[-(\triangle_\gamma(1)t)/T]\}^2 = 0{,}164$. Вычисляемая на основе (28), (29) величина $Q = \{1 - \exp[-(\triangle_\gamma(2)t)/2T]\}^2 = 0{,}089$. Тем самым формулы (28), (29) дают довольно значительный выигрыш при построении верхней доверительной границы для вероятности отказа системы по сравнению с часто используемым подходом, когда сначала находятся доверительные границы для элементов, а затем для системы в целом (соответствующей подстановкой в функцию надежности системы), по крайней мере, в области малых чисел отказов, т.е. в случае высоконадежных элементов.

6. Заключение

Таким образом, для модели системы с нагруженным резервированием получено решение задачи доверительного оценивания функции надежности системы снизу по результатам испытаний ее элементов в предположении, что элементы системы являются стареющими, т.е. имеют ВФИ-распределения времени безотказной работы (с возрастающей функцией интенсивности отказов). Заметим, что класс стареющих распределений является довольно широким и включает в себя целый ряд часто используемых в приложениях семейств распределений таких, как экспоненциальное, нормальное, Вейбулла, Эрланга и др. При этом допущение о старении элементов системы не связано с какими-либо жесткими параметрическими предположениями и отвечает естественным физическим представлениям. В высоконадежном случае (при малых числах отказов) полученные выражения дают значительный выигрыш по сравнению с часто используемым подходом, когда сначала находятся доверительные границы для отдельных элементов, а затем для системы в целом.

Заметим также, что существенный интерес, с прикладной точки зрения, представляет решение данной задачи для более общих моделей сложных систем, в том числе для систем со сложной структурой и систем с восстановлением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности (изд. 2-е, испр. и дополн.). М.: Книжный дом "Либроком", 2012.
2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М.: Радио и связь, 1969.
3. *Кокс Д.Р., Оукс Д.* Анализ данных типа времени жизни. М.: Финансы и статистика, 1988.
4. *Беляев Ю.К.* Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров // Докл. АН СССР. 1967. Т. 196. № 4. С. 755–758.
5. *Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A.* Statistical reliability engineering. N.Y.: John Wiley, 1999.
6. *Павлов И.В.* Доверительные границы для выпуклых функций многих неизвестных параметров // Теория вероятн. и ее применение. 1980. Т. 25. № 2. С. 394–398.
7. *Павлов И.В.* Последовательные доверительные множества // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 2. С. 282–285.
8. Надежность технических систем / Под ред. Ушакова И.А. М.: Радио и связь, 1986.
9. *Левин П.А., Павлов И.В.* Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 2. С. 28–37.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.С. Викторовой.

Поступила в редакцию 26.06.2014